

Epreuve sur dossier du CAPES externe de mathématiques, session 2009

(ORAL 2)

Ce document contient la liste des dossiers proposés aux candidats passant le second oral du CAPES externe 2009, telle qu'elle a été publiée sur le site officiel du Jury de l'époque.

Pour me contacter : dany-jack.mercier@hotmail.fr.
Pour surfer sur MégaMaths (Prépa CAPES) : http://megamaths.perso.neuf.fr/ (en 2010).

[0] [epreuvesurdossier2009]

Sujets de l’épreuve sur dossier 2009

Dossier du 27 juin 2009 : Intégration.

Dossier du 28 juin 2009 : Géométrie dans l’espace.

Dossier du 29 juin 2009 : Outils - Les transformations.

Dossier du 30 juin 2009 : Arithmétique.

Dossier du 1 juillet 2009 : Fonctions - Étude de représentations graphiques.

Dossier du 2 juillet 2009 : Probabilités.

Dossier du 3 juillet 2009 : Géométrie - Problèmes sur les configurations.

Dossier du 4 juillet 2009 : Analyse - Équations différentielles.

Dossier du 5 juillet 2009 : Suites numériques.

Dossier du 9 juillet 2009 : Fonctions usuelles.

Dossier du 10 juillet 2009 : Probabilités.

Dossier du 11 juillet 2009 : Arithmétique.

Dossier du 12 juillet 2009 : Problèmes sur les configurations.

Dossier du 13 juillet 2009 : Étude de suites.

Dossier du 14 juillet 2009 : Nombres complexes.

Dossier du 15 juillet 2009 : Intégration.

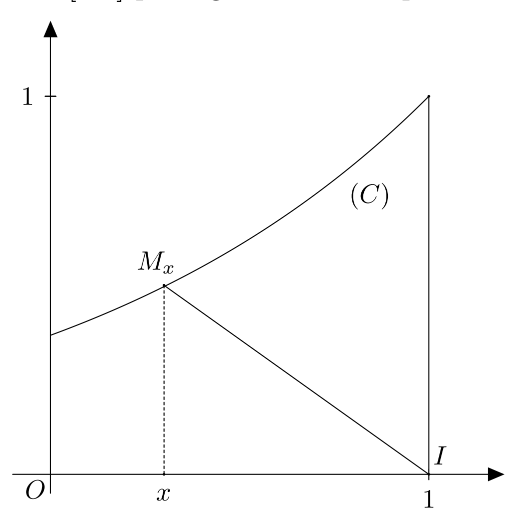
Dossier du 16 juillet 2009 : Différents types de raisonnement.

Dossier du 17 juillet 2009 : Géométrie dans l’espace.

Thème : Intégration

1. L'exercice proposé au candidat

Soit f une fonction dérivable, strictement positive et strictement croissante sur $[0,1]$ et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O. On note I le point de coordonnées $(1,0)$ et on note Δ la portion du plan comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$. Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'un unique réel α appartenant à l'intervalle $[0,1]$ tel que, si A est le point de (C) d'abscisse α, le segment $[IA]$ partage Δ en deux parties de même aire.



Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0,1]$, on note M_x le point de coordonnées $\big(x, f(x)\big)$. On désigne par g la fonction qui à tout réel $x \in [0,1]$ associe l'aire du domaine limité par la droite (IM_x), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe (C).

1) Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0,1]$, exprimer $g(x)$ en fonction de x.

2) Étudier les variations de la fonction g sur $[0,1]$.

3) a) Par des considérations d'aires, montrer que $g(0) < \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

   b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0,1]$ tel que $g(\alpha)$ soit égal à la moitié de l'aire de Δ.

2. Le travail demandé au candidat

> En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse à la question 3) de l'exercice ;

◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Intégration** ».

Le candidat présentera au jury :

– le contenu de ses fiches ;

– les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

3. Quelques références aux programmes

Programme de Terminale S

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Intégration		
Pour une fonction f continue positive sur $[a, b]$, introduction de la notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ comme aire sous la courbe. Valeur moyenne d'une telle fonction.	On indiquera que l'aire sous la courbe peut être approchée en l'encadrant par deux suites adjacentes construites en quadrillant le plan de plus en plus finement. Exemple où la fonction intégrée est en escalier. Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable.	Les élèves ont une notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul de l'aire de domaines plans liés aux fonctions ; tout développement théorique est exclu.
Extension à l'intégrale et à la valeur moyenne d'une fonction de signe quelconque.	On indiquera la convention de signe sur un intervalle où f est négative et on en déduira le cas général ; on pourra aussi ajouter une constante à f pour la rendre positive.	Cette extension doit être faite brièvement. Cette convention de signe prendra tout son sens lors de l'étude de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Intégration et dérivation		
Notion de primitive. Théorème : « si f est continue sur un intervalle I, et si a est un point de I, la fonction F telle que $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a ».	On démontrera que F est une primitive de f dans le cas où f est continue et croissante, et on admettra le cas général.	L'intégration permet d'établir l'existence de primitives des fonctions continues et d'en donner des méthodes numériques de calcul ; inversement, la connaissance d'une primitive d'une fonction continue donne une formule explicite pour le calcul des intégrales : les élèves devront percevoir l'intérêt de cette double démarche.
Calcul de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une primitive de f.	Tableau primitives-dérivées des fonctions usuelles (fonctions $x \mapsto x^n$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$, sinus, cosinus). Application de la dérivation des fonctions composées à la primitivation de u'/u, $u'\mathrm{e}^u$, $u'u^n$.	L'existence d'une solution de $y' = f(t)$, admise en 1re est ainsi justifiée ; de même, est justifiée l'existence du logarithme : celle de sa fonction réciproque en découle alors. La volonté d'introduire rapidement la fonction exponentielle pour la physique aura conduit à admettre un théorème d'existence en début d'année, qui se trouve ici justifié.
Intégration par parties.		On se limitera à des cas simples où l'élève aura à trouver lui-même le recours à la technique d'intégration par parties.

Thème : Géométrie dans l'espace

1. L'exercice proposé au candidat

L'espace est rapporté à une repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

1) Déterminer une équation du plan (P) passant par le point $A(1,0,1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2) Soit (P') le plan d'équation $x+2y-z+1=0$ et M le point de coordonnées $(0,1,1)$.
   a) Montrer que (P) et (P') sont perpendiculaires.
   b) Calculer les distances d et d' du point M respectivement aux plans (P) et (P').

3) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (D), intersection des plans (P) et (P').
   b) Déterminer les coordonnées du point H de (D) tel que la droite (MH) soit perpendiculaire à (D).
   c) Vérifier que $MH^2=d^2+d'^2$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse aux questions 3)a) et 3)b) ;

◇ deux exercices se rapportant au thème « **Géométrie dans l'espace** » dont un au moins ne fait pas appel à la géométrie analytique.

Le candidat présentera au jury :

– le contenu de ses fiches ;

– les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

3. Quelques références aux programmes

Programme de Terminale S

II.2 Géométrie

L'objectif de ce paragraphe est d'entretenir la pratique des objets usuels du plan et de l'espace et de fournir quelques notions nouvelles permettant de parfaire l'approche entreprise dans les classes antérieures sur la géométrie vectorielle ou repérée. [...] L'extension à l'espace du produit scalaire permet de résoudre de nouveaux problèmes et, de ce fait, d'approfondir la vision de l'espace.

Bien que, comme dans les programmes antérieurs, le libellé de cette partie soit relativement concis, on prendra le temps de mettre en œuvre toutes les connaissances de géométrie de l'ensemble du cursus scolaire pour l'étude de configurations du plan ou de l'espace, le calcul de distances, d'angles, d'aires et de volumes, etc..

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Produit scalaire dans l'espace Rappels sur le produit scalaire dans le plan. Définition du produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace. Propriétés, expression en repère orthonormal.	Expression en repère orthonormal de la distance d'un point à une droite dans le plan. Plan orthogonal à un vecteur passant par un point. Équation cartésienne en repère orthonormal. Expression de la distance à un plan. Inéquation définissant un demi-espace.	On généralisera aux vecteurs de l'espace la définition du produit scalaire donnée dans le plan ; à cette occasion on présentera la projection orthogonale sur une droite ou sur un plan.
Droites et plans dans l'espace Caractérisation barycentrique d'une droite, d'un plan, d'un segment, d'un triangle. Représentation paramétrique d'une droite de l'espace Intersection de deux plans, d'une droite et d'un plan, de trois plans ; discussion algébrique.	On reprendra les problèmes d'alignement et de concours déjà abordés en classe de Première. On fera clairement apparaître que les problèmes géométriques considérés ici sont l'étude des systèmes d'équations linéaires, que l'on résoudra algébriquement. On traitera aussi quelques situations numériques (issues de l'analyse, de situations économiques ou d'autres) s'y ramenant.	Les élèves doivent aussi savoir qu'une droite de l'espace peut être représentées par un système de deux équations linéaires.

Thème : Outils
Les transformations

1. L'exercice proposé au candidat

On considère dans le plan trois droites parallèles et distinctes (D_1), (D_2) et (D_3). Une droite (Δ) coupe (D_1), (D_2) et (D_3) respectivement en A, B et C. Soit N un point de (D_2) distinct de B. La parallèle à (NC) passant par B coupe (D_1) en M. La parallèle à (NA) passant par B coupe (D_3) en P.

1) Soit h l'homothétie de centre A qui transforme B en C. Construire les points M' et N' images respectives de M et N par l'homothétie h.
2) En déduire les images de M et N par la transformation $f = t_{\overrightarrow{NB}} \circ h$.
3) Montrer que les points M, N et P sont alignés.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 1) de l'exercice ;
- ◇ un ou plusieurs exercices utilisant les transformations comme outil.

Le candidat présentera au jury :

- les méthodes et les savoir-faire mis en jeu ainsi que les objectifs d'apprentissage visés dans cet exercice ;
- le contenu de ses fiches.

3. Quelques références aux programmes

Programme de Première scientifique.

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Transformations		
Translations et homothéties dans le plan et l'espace : définitions ; image d'un couple de points ; effet sur l'alignement, le barycentre, les angles orientés, les longueurs, les aires et les volumes ; image d'une figure (segment, droite, cercle).	Toutes les transformations connues seront utilisées dans l'étude des configurations, pour la détermination de lieux géométriques et dans la recherche de problèmes de construction, en particulier au travers des logiciels de géométrie.	Les transformations planes abordées en collège (translation, symétrie axiale, rotation) n'ont pas à faire l'objet d'un chapitre particulier.

Programmes de Terminale scientifique (enseignement de spécialité)

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Similitudes planes		
Définition géométrique. Cas des isométries. Caractérisation complexe : toute similitude a une écriture complexe de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\overline{z} + b$ (a non nul).	Les similitudes seront introduites comme transformations du plan conservant les rapports de distances. On fera remarquer que la réciproque d'une similitude est une similitude, que la composée de deux similitudes est une similitude et que, dans le cas général, la composition n'est pas commutative. On démontrera qu'une similitude ayant deux points fixes distincts est l'identité ou une symétrie axiale.	La définition générale sera illustrée d'une part avec les transformations étudiées antérieurement, d'autre part avec les transformations d'écriture complexe $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\overline{z} + b$; ces dernières seront amenées progressivement à travers des exemples. La caractérisation complexe est un moyen efficace d'établir la plupart des propriétés.
Étude des similitudes directes :	Forme réduite d'une similitude directe. On démontrera la propriété suivante : étant donnés quatre points A, B, A', B' tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.	La recherche des éléments caractérisant une similitude indirecte est hors programme.
	Applications géométriques des similitudes à l'étude de configurations, la recherche de lieux et la résolution de problèmes de construction.	On fera le lien avec les triangles semblables ou isométriques introduits en classe de Seconde.

Thème : Arithmétique

1. L'exercice proposé au candidat

Les nombres 1, 11, 111, 1111, etc. sont des nombres que l'on appelle *rep-units* (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent les mathématiciens. Cet exercice propose d'en découvrir quelques-unes.

Pour tout entier k strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit avec k chiffres 1.

1) Citer, en justifiant la réponse, deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit en produit de facteurs premiers.
2) À quelle condition sur k, le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition en produit de facteurs premiers du rep-unit N_k ?
3) Pour tout entier k strictement positif, on a :

$$N_k = \sum_{i=0}^{i=k-1} 10^i = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}.$$

Justifier l'égalité : $9N_k = 10^k - 1$.

4) a) Soit k un entier strictement positif, montrer que $10^k \equiv 1 \pmod 7$ si et seulement si k est multiple de 6.
   b) En déduire que 7 divise N_k si et seulement si k est multiple de 6.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse à la question 4) ;

◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Arithmétique** ».

Le candidat présentera au jury :

◇ le contenu de ses fiches ;

◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

3. Quelques références aux programmes

Classe de Terminale S, enseignement de spécialité

L'arithmétique est un champ des mathématiques très vivant dont les applications récentes sont nombreuses ; c'est un domaine au matériau élémentaire et accessible conduisant à des raisonnements intéressants et formateurs. C'est un lieu naturel de sensibilisation à l'algorithmique où la nécessité d'être précis impose rigueur et clarté du raisonnement.

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Arithmétique		
Divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Division euclidienne. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD. Congruences dans $\mathbb{Z}$. Entiers premiers entre eux.	On fera la synthèse des connaissances acquises dans ce domaine au collège et en classe de Seconde. On étudiera quelques algorithmes simples et on les mettra en œuvre sur calculatrice ou tableur : recherche d'un PGCD, décomposition d'un entier en facteurs premiers, reconnaissance de la primalité d'un entier.	On montrera l'efficacité du langage des congruences. On utilisera les notations : $a \equiv b \pmod n$ ou $a \equiv b$ (modulo n) et on établira les compatibilités avec l'addition et la multiplication. Toute introduction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est exclue.
Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers. PPCM.	On démontrera que l'ensemble des nombres premiers est infini.	L'unicité de la décomposition en facteurs premiers pourra être admise.
Théorème de Bézout. Théorème de Gauss.	Sur des exemples simples, obtention et utilisation de critères de divisibilité. Exemples simples d'équations diophantiennes. Applications élémentaires au codage et à la cryptographie. Application : petit théorème de Fermat.	L'arithmétique est un domaine avec lequel l'informatique interagit fortement ; on veillera à équilibrer l'usage de divers moyens de calculs : à la main, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.

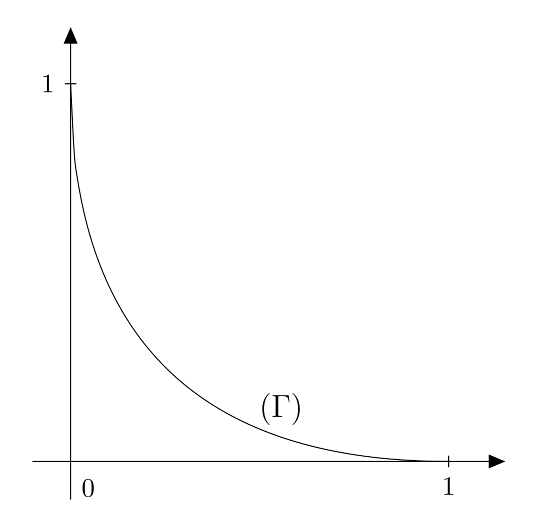
Thème : Fonctions
Étude de représentations graphiques

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1.$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O, la courbe (Γ) représentative de f est donnée ci-dessous.



1) a) Montrer que le point M de coordonnées (x, y) appartient à (Γ) si et seulement si $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

   b) Montrer que (Γ) est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2) La courbe (Γ) est-elle un arc de cercle ? Justifier.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 2) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices faisant appel à l'étude ou à l'utilisation de représentations graphiques de fonctions.

Le candidat présentera au jury :

- le contenu de ses fiches ;
- les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

3. Quelques références aux programmes

Programme de Troisième

1. Organisation et gestion de données, fonctions

L'un des objectifs est de faire émerger progressivement, sur des exemples, la notion de fonction en tant que processus faisant correspondre, à un nombre, un autre nombre. Les exemples mettant en jeu les fonctions sont issus de situations concrètes ou de thèmes interdisciplinaires. Les fonctions linéaires et affines apparaissent alors comme des exemples particuliers de tels processus. [...] L'usage du tableur grapheur contribue aussi à la mise en place du concept, dans ses aspects numériques comme dans ses aspects graphiques.

La notion d'équation de droite n'est pas au programme de la classe de Troisième.

Programme de Seconde

Contenus	**Capacités attendues**	**Commentaires**
Premières fonctions de référence.	Établir le sens de variation et représenter graphiquement les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ Connaître la représentation graphique de $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$	D'autres fonctions telles que $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \|x\|$ pourront être découvertes. Les résultats les concernant pourront être admis.
Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et d'inéquations.	Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré. Utiliser un tableau de signe pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction. Résoudre graphiquement des équations ou inéquations du type $f(x) = k$, $f(x) < k$, $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$ ...	Pour un même problème, on combinera les apports des modes de résolution graphique et algébrique. On précisera les avantages et les limites de ces différents modes de résolution. On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives.

Programme de Première S

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Généralités sur les fonctions		
Définition d'une fonction polynôme et de son degré. Sens de variation et représentation graphique d'une fonction de la forme $u + \lambda$, λu, la fonction u étant connue. Sens de variation de $u \circ v$, u et v étant monotones.	On partira des fonctions étudiées en classe de Seconde. Sur des exemples et selon le problème traité, on proposera plusieurs écritures d'une même fonction trinôme, d'une même fonction homographique. On travaillera, à l'aide de grapheurs, sur des familles de courbes représentatives de fonctions associées à deux fonctions données u et v : $u + \lambda$, λu, $u + v$, $\|u\|$, $x \mapsto u(\lambda x)$ et $x \mapsto u(x + \lambda)$.	Les transformations d'écritures s'effectueront à l'occasion des différentes activités de ce chapitre (dérivation, recherche d'asymptotes, résolution d'équations). On remarquera que certaines familles de fonctions sont stables par certaines opérations, pas par d'autres. On remarquera à l'aide de contre-exemples qu'on ne peut pas énoncer de règle donnant dans tous les cas le sens de variation de $u + v$ ou de $u \times v$. On justifiera les symétries observées sur les représentations graphiques.

Thème : Probabilités

1. L'exercice proposé au candidat

Au cours d'une journée, un commercial se déplace pour visiter deux de ses clients afin de leur proposer l'achat d'un produit de grande consommation d'une valeur de 500 €.

Au vu de son expérience, le commercial estime que :

- la probabilité que le premier client visité achète le produit est égal à 0,25 ;
- si le premier client achète le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à 0,4 ;
- si le premier client n'achète pas le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à 0,25 ;

1) On note A l'événement « le premier client achète le produit » et B l'événement « le second client achète le produit ». Calculer la probabilité de l'événement B.
2) Quelle est la probabilité qu'un seul des clients conclue l'achat ?
3) Le commercial perçoit 15% sur le total de sa vente.
   a) Établir la loi de probabilité associée au gain de la journée.
   b) Quelle est l'espérance mathématique du gain ?
4) Quel doit être le pourcentage minimum de sa commission pour que cette espérance dépasse 60 € ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse à la question 3) ;

◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Probabilités** ».

Le candidat présentera au jury :

- le contenu de ses fiches ;
- les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

3. Quelques références aux programmes

Classe de Première scientifique

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Probabilités		
Définition d'une loi de probabilité sur un ensemble fini. Espérance, variance, écart-type d'une loi de probabilité. Probabilité d'un événement, de la réunion et de l'intersection d'événements. Cas de l'équiprobabilité. Variable aléatoire, loi d'une variable aléatoire, variance, écart-type. Modélisation d'expériences aléatoires de référence (lancers d'un ou plusieurs dés ou pièces discernables ou non, tirage au hasard dans une urne, choix de chiffres au hasard, etc.).	Le lien entre loi de probabilité et distributions de fréquences sera éclairé par un énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres. On expliquera ainsi la convergence des moyennes vers l'espérance et des variances empiriques vers les variances théoriques ; on illustrera ceci par des simulations dans des cas simples. On pourra aussi illustrer cette loi avec les diagrammes en boîtes obtenus en simulant par exemple 100 sondages de taille n, pour $n = 10$; 100 ; 1000. On simulera des lois de probabilités simples obtenues comme images d'une loi équirépartie par une variable aléatoire (sondage, somme des faces de deux dés, etc.).	On pourra par exemple choisir comme énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres la proposition suivante : « Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité P, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de P quand n devient grand. » On indiquera que simuler une expérience consiste à simuler un modèle de cette expérience. La modélisation avec des lois ne découlant pas d'une loi équirépartie est hors programme. On évitera le calcul systématique et sans but précis de l'espérance et de la variance de lois de probabilité.

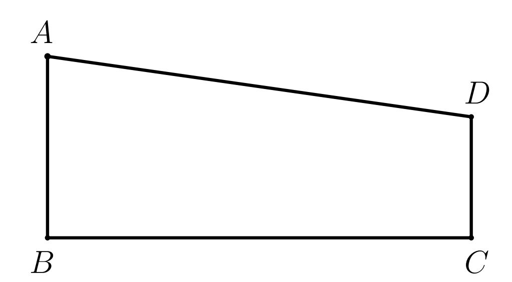
Classe de Terminale scientifique

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Conditionnement et indépendance		
Conditionnement par un événement de probabilité non nulle puis indépendance de deux événements. Indépendance de deux variables aléatoires. Formule des probabilités totales.	On justifiera la définition de la probabilité de B sachant A, notée $P_A(B)$, par des calculs fréquentiels. On utilisera à bon escient les représentations telles que tableaux, arbres, diagrammes, efficaces pour résoudre des problèmes de probabilités. Application à la problématique des tests de dépistage en médecine et à la loi de l'équilibre génétique lors d'appariements au hasard.	Un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve. Les élèves doivent savoir appliquer sans aide la formule des probabilités totales dans des cas simples.
Lois de probabilités		
Exemples de lois continues, lois continues à densité : – loi uniforme sur $[0, 1]$; – loi de durée de vie sans vieillissement.	Application à la désintégration radioactive : loi exponentielle de désintégration des noyaux.	Ce paragraphe est une application de ce qui aura été fait en début d'année sur l'exponentielle et le calcul intégral.

Thème : Géométrie
Problèmes sur les configurations

1. L'exercice proposé au candidat

Dans le plan, on considère le trapèze $ABCD$, de bases $[AB]$ et $[CD]$, rectangle en B. On donne $AB = 3$, $BC = 7$ et $CD = 2$.



1) Justifier l'existence et l'unicité d'un point M de la droite (BC) tel que $AM = DM$. Construire ce point à la règle et au compas.
2) Existe-t-il des points M de la droite (BC) tels que (AM) et (DM) soient perpendiculaires ? Si oui, construire ce ou ces point(s) à la règle et au compas.
3) On note f la fonction qui à tout point M du segment $[BC]$ associe $AM + DM$. Cette fonction admet-elle un minimum ? (*On pourra utiliser une transformation géométrique ou se placer dans un repère.*)

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse à la question 3) ;

◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Problèmes sur les configurations** ».

Le candidat présentera au jury :

– une animation, à l'aide du module de géométrie de la calculatrice, permettant de conjecturer la réponse à la question 3) ;

– le contenu de ses fiches.

3. Quelques références aux programmes

Classe de Seconde

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Les configurations du plan. Triangles isométriques, triangles de même forme.	Utiliser, pour résoudre des problèmes, les configurations et les transformations étudiées en collège, en argumentant à l'aide de propriétés identifiées. Reconnaître des triangles isométriques. Reconnaître des triangles de même forme. Résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires.	On pourra utiliser la définition suivante : « deux triangles ont la même forme si les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre » (il s'agit donc de triangles semblables). On caractérisera ensuite, grâce au théorème de Thalès, deux triangles de même forme par l'existence d'un coefficient d'agrandissement/réduction.

Classe de Première S

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Repérage Repérage polaire dans le plan et trigonométrie ; mesures des angles orientés, mesure principale, relation de Chasles, lignes trigonométriques des angles associés.	Repérage d'abord d'un point du cercle trigonométrique, à l'aide d'un réel défini à un multiple près de 2 ; lien entre repérage polaire et repérage cartésien.	[...]
Géométrie vectorielle Produit scalaire dans le plan ; définition, propriétés. Applications du produit scalaire : projeté orthogonal d'un vecteur sur un axe ; calculs de longueurs.	Propriétés de bilinéarité, de symétrie et expression analytique dans un repère orthonormal. Calculs d'angles, de longueurs et d'aires sur des figures planes en liaison avec le produit scalaire ; on établira et utilisera la formule dite d'Al Kashi, le théorème de la médiane et les formules d'addition et de duplication pour les fonctions cosinus et sinus.	On n'étendra pas le produit scalaire à l'espace. On pourra faire le lien avec le travail d'une force. Pour certains exercices, il pourra être utile de disposer des formules reliant les sinus des angles, les côtés et l'aire d'un triangle.
Transformations Translations et homothéties dans le plan et l'espace : définitions ; image d'un couple de points ; effet sur l'alignement, le barycentre, les angles orientés, les longueurs, les aires et les volumes ; image d'une figure (segment, droite, cercle).	Toutes les transformations connues seront utilisées dans l'étude des configurations, pour la détermination de lieux géométriques et dans la recherche de problèmes de construction, en particulier au travers des logiciels de géométrie.	Les transformations planes abordées en collège (translation, symétrie axiale, rotation) n'ont pas à faire l'objet d'un chapitre particulier.

Thème : Analyse
Équations différentielles

1. L'exercice proposé au candidat

Dans cet exercice on se propose de rechercher, s'il en existe, des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(C) \; : \; \begin{cases} \text{pour tout réel } x, \; f(-x)f'(x) = 1 \\ f(0) = -4 \end{cases}$$

1) Dans cette question, on suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C). On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(-x)f(x).$$

   a) Démontrer que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.

   b) Montrer alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \; : \; \begin{cases} y' = \dfrac{1}{16} y \\ y(0) = -4 \end{cases}$$

2) En déduire les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition (C).

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa solution de la question 2) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Équations différentielles** ».

Le candidat présentera au jury :

- le contenu de ses fiches ;
- les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

3. Quelques références aux programmes

Classe de Terminale STI

d) Équations differentielles

Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel : existence et unicité de la solution vérifiant une condition initiale donnée.

Résolution de l'équation différentielle $y'' = -\omega^2 y$ où ω est un nombre réel : existence et unicité (admises) de la solution vérifiant des conditions initiales données.

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Équations différentielles	Exemples simples d'étude de phénomènes continus satisfaisant à une loi d'évolution et à une condition initiale se ramenant à une équation du type $y' = ay$ ou $y'' = -\omega^2 y$.	Certaines de ces situations seront issues des sciences physiques (mécanique du point, circuits électriques...). Lorsqu'une telle étude mène à une équation avec second membre, la méthode à suivre pour se ramener à l'équation sans second membre doit être indiquée. D'autre part, dans certaines sections, en liaison avec l'enseignement d'autres disciplines, on pourra être amené à étudier d'autres types d'équations différentielles mais ceci est en dehors du programme de mathématiques.

Classe de Terminale S

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Introduction de la fonction exponentielle		
Étude de l'équation $f' = kf$. Théorème : « Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. » Relation fonctionnelle caractéristique. Introduction du nombre e. Notation e^x. Extension du théorème pour l'équation $f' = kf$.	L'étude de ce problème pourra être motivée par un ou deux exemples, dont celui de la radioactivité traité en physique, ou par la recherche des fonctions dérivables f telles que $f(x+y) = f(x)f(y)$. On construira avec la méthode d'Euler introduite en première des représentations graphiques approchées de f dans le cas $k = 1$; on comparera divers tracés obtenus avec des pas de plus en plus petits. L'unicité sera démontrée. L'existence sera admise dans un premier temps. Elle sera établie ultérieurement à l'occasion de la quadrature de l'hyperbole. Approximation affine, au voisinage de 0, de $h \mapsto \mathrm{e}^h$.	Ce travail se fera très tôt dans l'année car il est central dans le programme de mathématiques et de physique. Il fournit un premier contact avec la notion d'équation différentielle et montre comment étudier une fonction dont on ne connaît pas une formule explicite. La méthode d'Euler fait apparaître une suite géométrique et donne l'idée que l'exponentielle est l'analogue continu de la notion de suite géométrique, ce que l'équation fonctionnelle confirme.

Thème : Suites numériques

1. L'exercice proposé au candidat

On considère une suite numérique (u_n) positive et la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier dans chaque cas.

1) La suite (v_n) est bornée.
2) Si la suite (u_n) est croissante, alors la suite (v_n) est croissante.
3) Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente.
4) Si la suite (v_n) est convergente, alors la suite (u_n) est convergente.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse aux questions 3) et 4) de l'exercice ;

◇ deux exercices sur le thème « **Suites numériques** ».

Le candidat présentera au jury :

– le contenu de ses fiches ;

– les connaissances et savoir-faire mis en jeu ainsi que les objectifs d'apprentissage visés dans cet exercice.

3. Quelques références aux programmes

Programme de Première S

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Suites		
Modes de générations d'une suite numérique. Suite croissante, suite décroissante. Suites arithmétiques et suites géométriques.	Étude de l'évolution de phénomènes discrets amenant à une relation de récurrence. Calcul des termes d'une suite sur calculatrice ou tableur ; observation des vitesses de croissance (resp. de décroissance) pour des suites arithmétiques et des suites géométriques. Comparaison des valeurs des premiers termes des suites $(1+t)^n$ et $1+nt$ pour différentes valeurs de t (en lien avec la notion de dérivée). On pourra étudier numériquement, sur ordinateur ou calculatrice, le temps de doublement d'un capital placé à taux d'intérêt constant, la période de désintégration d'une substance radioactive, etc.	On veillera à faire réaliser sur calculatrice des programmes où interviennent boucle et test.

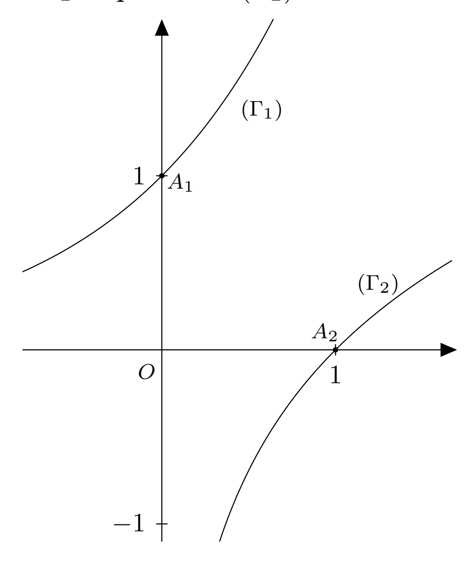
Programme de Terminale S

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Raisonnement par récurrence Suite monotone, majorée, minorée, bornée.	On choisira des exemples permettant d'introduire le vocabulaire usuel des suites et nécessitant l'utilisation de raisonnements par récurrence. On s'appuiera sur un traitement tant numérique (avec outils de calcul : calculatrice ou ordinateur) que graphique ou algébrique.	On présentera le principe de récurrence comme un axiome.
Suites		
Modes de générations d'une suite numérique. Suite croissante, suite décroissante.	On étudiera numériquement sur un ou deux exemples, la rapidité de convergence d'une suite (u_n) vers sa limite L, en complétant l'étude sur tableur par des encadrements de $(u_n - L)$. On traitera quelques problèmes menant à l'étude de suites définies par $u_{n+1} = au_n + b$.	Aucune notion théorique de rapidité de convergence n'est au programme.

Thème : Fonctions usuelles

1. L'exercice proposé au candidat

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O, on note respectivement (Γ_1) et (Γ_2) les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien. Soit A_1 le point de (Γ_1) d'abscisse 0 et A_2 le point de (Γ_2) d'abscisse 1.



1) a) Donner une équation de la tangente (Δ_1) à la courbe (Γ_1) au point A_1 et une équation de la tangente (Δ_2) à la courbe (Γ_2) au point A_2.

   b) Montrer que les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont parallèles et calculer la distance de (Δ_1) à (Δ_2).

2) a) Déterminer la position relative de (Γ_1) par rapport à (Δ_1) et la position relative de (Γ_2) par rapport à (Δ_2).

   b) Lorsque le point M_1 parcourt la courbe (Γ_1) et lorsque le point M_2 parcourt la courbe (Γ_2), quelle est la valeur minimale de la distance M_1M_2 ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 2) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices dans lesquels interviennent des représentations graphiques de fonctions usuelles.

Le candidat présentera au jury :

- le contenu de ses fiches ;
- les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

3. Quelques références aux programmes

Programme de Seconde

Contenus	**Capacités attendues**	**Commentaires**
Premières fonctions de référence.	Établir le sens de variation et représenter graphiquement les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ Connaître la représentation graphique de $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$	D'autres fonctions telles que $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \lvert x\rvert$ pourront être découvertes. Les résultats les concernant pourront être admis.
Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et d'inéquations.	Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré. Utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction. Résoudre graphiquement des équations ou inéquations du type $f(x) = k$, $f(x) < k$, $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$ ...	Pour un même problème, on combinera les apports des modes de résolution graphique et algébrique. On précisera les avantages et les limites de ces différents modes de résolution. On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives.

Programme de Première S

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Généralités sur les fonctions		
Définition d'une fonction polynôme et de son degré. Sens de variation et représentation graphique d'une fonction de la forme $u + \lambda$, λu, la fonction u étant connue. Sens de variation de $u \circ v$, u et v étant monotones.	On partira des fonctions étudiées en classe de Seconde. Sur des exemples et selon le problème traité, on proposera plusieurs écritures d'une même fonction trinôme, d'une même fonction homographique. On travaillera, à l'aide de grapheurs, sur des familles de courbes représentatives de fonctions associées à deux fonctions données u et v : $u + \lambda$, λu, $u + v$, $\lvert u\rvert$, $x \mapsto u(\lambda x)$ et $x \mapsto u(x + \lambda)$.	Les transformations d'écritures s'effectueront à l'occasion des différentes activités de ce chapitre (dérivation, recherche d'asymptotes, résolution d'équations). On remarquera que certaines familles de fonctions sont stables par certaines opérations, pas par d'autres. On remarquera à l'aide de contre-exemples qu'on ne peut pas énoncer de règle donnant dans tous les cas le sens de variation de $u + v$ ou de $u \times v$. On justifiera les symétries observées sur les représentations graphiques.

Programme de Terminale scientifique : Analyse

Deux objectifs majeurs fédèrent les éléments de ce chapitre :

- l'extension du champ des suites et des fonctions vues en classe de Première à quelques nouvelles fonctions classiques : exponentielles, logarithmes, trigonométriques (telle la fonction tangente) ou faisant intervenir des radicaux ;
- l'initiation au calcul intégral et à la problématique des équations différentielles : la présence de ces dernières, bien que modeste dans le libellé du programme, est fondamentale pour amener à la compréhension de la puissance des mathématiques pour la modélisation ; un travail conjoint avec les autres disciplines favorisera cet objectif.

Thème : Probabilités

1. L'exercice proposé au candidat

Un quincaillier achète des ampoules à trois fournisseurs dans les proportions suivantes : 20% au premier fournisseur, 50% au deuxième fournisseur et 30% au troisième fournisseur.

Le premier fournisseur fabrique 97% d'ampoules sans défaut, le deuxième fournisseur fabrique 98% d'ampoules sans défaut, le troisième fournisseur fabrique 95% d'ampoules sans défaut.

1) On choisit une ampoule au hasard dans le stock. On note D l'événement « l'ampoule est défectueuse », F_1 l'événement « l'ampoule vient du premier fournisseur », F_2 l'événement « l'ampoule vient du deuxième fournisseur » et F_3 l'événement « l'ampoule vient du troisième fournisseur ».

   Calculer la probabilité de l'événement D, notée $P(D)$.

2) On admet que la probabilité qu'une ampoule soit sans défaut est de 0,969. On monte 12 ampoules sur un lustre. Calculer la probabilité qu'une ampoule au plus soit défectueuse.

3) La durée de vie d'une ampoule, notée T, suit une loi de durée de vie sans vieillissement (ou loi exponentielle) de paramètre $\lambda = 2 \cdot 10^{-5}$. Selon cette loi, pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a $P(T \leqslant x) = \displaystyle\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

   Quelle est la probabilité qu'une ampoule dure plus de 50 000 heures sachant qu'elle a déjà duré 25 000 heures ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 3) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices sur le thème « **Probabilités** » dont un au moins se rapportant aux probabilités conditionnelles.

Le candidat présentera au jury :

- – le contenu de ses fiches ;
- – les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

3. Quelques références aux programmes

Classe de Première scientifique

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Probabilités		
Définition d'une loi de probabilité sur un ensemble fini. Espérance, variance, écart-type d'une loi de probabilité. Probabilité d'un événement, de la réunion et de l'intersection d'événements. Cas de l'équiprobabilité. Variable aléatoire, loi d'une variable aléatoire, variance, écart-type. Modélisation d'expériences aléatoires de référence (lancers d'un ou plusieurs dés ou pièces discernables ou non, tirage au hasard dans une urne, choix de chiffres au hasard, etc.).	Le lien entre loi de probabilité et distributions de fréquences sera éclairé par un énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres. On expliquera ainsi la convergence des moyennes vers l'espérance et des variances empiriques vers les variances théoriques ; on illustrera ceci par des simulations dans des cas simples. On pourra aussi illustrer cette loi avec les diagrammes en boîtes obtenus en simulant par exemple 100 sondages de taille n, pour $n = 10$; 100 ; 1000. On simulera des lois de probabilités simples obtenues comme images d'une loi équirépartie par une variable aléatoire (sondage, somme des faces de deux dés, etc.).	On pourra par exemple choisir comme énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres la proposition suivante : « Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité P, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de P quand n devient grand. » On indiquera que simuler une expérience consiste à simuler un modèle de cette expérience. La modélisation avec des lois ne découlant pas d'une loi équirépartie est hors programme. On évitera le calcul systématique et sans but précis de l'espérance et de la variance de lois de probabilité.

Classe de Terminale scientifique

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Conditionnement et indépendance		
Conditionnement par un événement de probabilité non nulle puis indépendance de deux événements. Indépendance de deux variables aléatoires. Formule des probabilités totales.	On justifiera la définition de la probabilité de B sachant A, notée $P_A(B)$, par des calculs fréquentiels. On utilisera à bon escient les représentations telles que tableaux, arbres, diagrammes, efficaces pour résoudre des problèmes de probabilités. Application à la problématique des tests de dépistage en médecine et à la loi de l'équilibre génétique lors d'appariements au hasard.	Un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve. Les élèves doivent savoir appliquer sans aide la formule des probabilités totales dans des cas simples.
Lois de probabilités Exemples de lois continues, lois continues à densité : – loi uniforme sur $[0, 1]$; – loi de durée de vie sans vieillissement.	Application à la désintégration radioactive : loi exponentielle de désintégration des noyaux.	Ce paragraphe est une application de ce qui aura été fait en début d'année sur l'exponentielle et le calcul intégral.

Thème : Arithmétique

1. L'exercice proposé au candidat

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, **en justifiant le choix effectué**.

1) Si un entier est divisible par 4, alors il est divisible par 8.
2) Si un entier est divisible par 4 et par 5, alors il est divisible par 20.
3) Si un entier est divisible par 4 et par 6, alors il est divisible par 24.
4) Si deux entiers naturels a et b ($a > b$) sont premiers entre eux, alors le PGCD de $a + b$ et $a - b$ est égal à 1 ou à 2.
5) Si deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux, alors les entiers a^2 et b^2 sont premiers entre eux.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 4) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Arithmétique** » dont un au moins faisant appel à la notion de congruence.

Le candidat présentera au jury :

- le contenu de ses fiches ;
- les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

3. Quelques références aux programmes

Classe de Terminale S, enseignement de spécialité

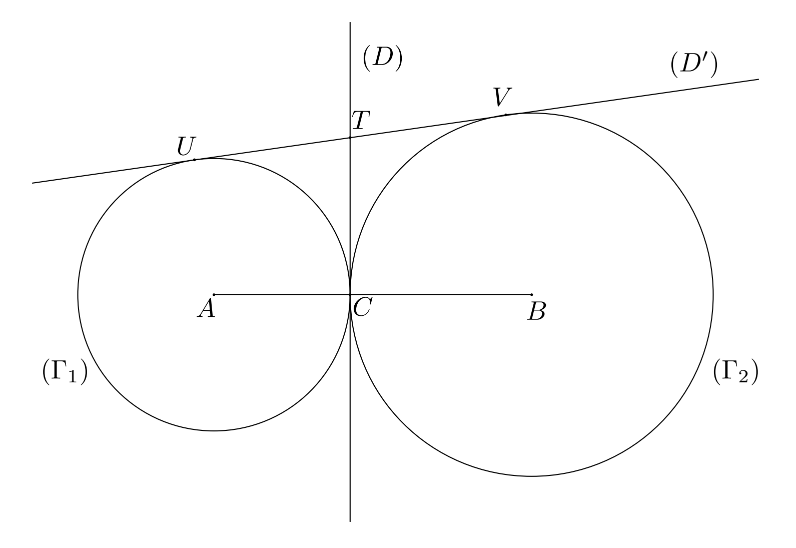
L'arithmétique est un champ des mathématiques très vivant dont les applications récentes sont nombreuses ; c'est un domaine au matériau élémentaire et accessible conduisant à des raisonnements intéressants et formateurs. C'est un lieu naturel de sensibilisation à l'algorithmique où la nécessité d'être précis impose rigueur et clarté du raisonnement.

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Arithmétique		
Divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Division euclidienne. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD. Congruences dans $\mathbb{Z}$. Entiers premiers entre eux.	On fera la synthèse des connaissances acquises dans ce domaine au collège et en classe de Seconde. On étudiera quelques algorithmes simples et on les mettra en œuvre sur calculatrice ou tableur : recherche d'un PGCD, décomposition d'un entier en facteurs premiers, reconnaissance de la primalité d'un entier.	On montrera l'efficacité du langage des congruences. On utilisera les notations : $a \equiv b \pmod n$ ou $a \equiv b$ (modulo n) et on établira les compatibilités avec l'addition et la multiplication. Toute introduction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est exclue.
Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers. PPCM.	On démontrera que l'ensemble des nombres premiers est infini.	L'unicité de la décomposition en facteurs premiers pourra être admise.
Théorème de Bézout. Théorème de Gauss.	Sur des exemples simples, obtention et utilisation de critères de divisibilité. Exemples simples d'équations diophantiennes. Applications élémentaires au codage et à la cryptographie. Application : petit théorème de Fermat.	L'arithmétique est un domaine avec lequel l'informatique interagit fortement ; on veillera à équilibrer l'usage de divers moyens de calculs : à la main, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.

Thème : Problèmes sur les configurations

1. L'exercice proposé au candidat

On considère deux cercles (Γ_1) et (Γ_2) de centres respectifs A et B et tangents extérieurement en C. La droite (D) est la tangente commune à (Γ_1) et (Γ_2) en C et la droite (D') est tangente à (Γ_1) en U $(U \neq C)$ et à (Γ_2) en V. Les deux droites (D) et (D') se coupent en T.



1) Montrer que le triangle UCV est rectangle en C.
2) Montrer que le triangle ATB est rectangle en T.
3) On donne deux cercles tangents extérieurement en un point C. En vous aidant des questions précédentes, donner une construction à la règle et au compas d'une droite tangente à ces deux cercles et ne passant pas par C.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse à la question 3) ;

◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Problèmes sur les configurations** » dont l'un au moins utilisera le module de géométrie dynamique de la calculatrice.

Le candidat présentera au jury :

– le contenu de ses fiches ;

– les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

3. Quelques références aux programmes

Classe de Quatrième

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Triangle rectangle et cercle Cercle circonscrit, théorème de Pythagore et sa réciproque.	Caractériser le triangle rectangle : – par son inscription dans un demi-cercle ; – par la propriété de Pythagore et sa réciproque. Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir de celles des deux autres. En donner, s'il y a lieu, une valeur approchée, en faisant éventuellement usage de la touche racine d'une calculatrice. Caractériser les points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit.	On poursuit le travail sur la caractérisation des figures en veillant à toujours la formuler à l'aide d'énoncés séparés. Les relations métriques dans le triangle rectangle, autres que celles mentionnées dans les compétences exigibles, ne sont pas au programme.
Tangente ; distance d'un point à une droite.	Construire la tangente à un cercle en l'un de ses points. Savoir que le point d'une droite le plus proche d'un point donné est le pied de la perpendiculaire menée du point à la droite.	Le problème d'intersection d'un cercle et d'une droite fera l'objet d'activités, sans pour autant que l'énoncé du résultat général soit une compétence exigible. L'inégalité triangulaire et la symétrie axiale, vues en classe de 5e, permettent de démontrer le résultat relatif à la distance d'un point à une droite, lequel peut aussi être relié au théorème de Pythagore.

Classe de Seconde

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Les configurations du plan Triangles isométriques, triangles de même forme.	Utiliser, pour résoudre des problèmes, les configurations et les transformations étudiées en collège, en argumentant à l'aide de propriétés identifiées. Reconnaître des triangles isométriques. Reconnaître des triangles de même forme. Résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires.	On pourra utiliser la définition suivante : « deux triangles ont la même forme si les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre » (il s'agit donc de triangles semblables). On caractérisera ensuite, grâce au théorème de Thalès, deux triangles de même forme par l'existence d'un coefficient d'agrandissement/réduction.

Thème : Étude de suites

1. L'exercice proposé au candidat

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\times\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{n}{n^2}\right).$$

On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = \ln(u_n)$.

1) Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x\,.$$

2) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant n^3\,.$$

3) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

4) Est-ce que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 3) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices sur les suites dont un au moins fera intervenir une illustration graphique.

Le candidat présentera au jury :

- le contenu de ses fiches ;
- les méthodes et les savoirs mis en jeu ainsi que les objectifs d'apprentissage visés dans cet exercice.

3. Quelques références aux programmes

Programme de Première S

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Suites Modes de générations d'une suite numérique. Suite croissante, suite décroissante. Suites arithmétiques et suites géométriques.	Étude de l'évolution de phénomènes discrets amenant à une relation de récurrence. Calcul des termes d'une suite sur calculatrice ou tableur ; observation des vitesses de croissance (resp. de décroissance) pour des suites arithmétiques et des suites géométriques. Comparaison des valeurs des premiers termes des suites $(1+t)^n$ et $1+nt$ pour différentes valeurs de t (en lien avec la notion de dérivée). On pourra étudier numériquement, sur ordinateur ou calculatrice, le temps de doublement d'un capital placé à taux d'intérêt constant, la période de désintégration d'une substance radioactive, etc.	On veillera à faire réaliser sur calculatrice des programmes où interviennent boucle et test.

Programme de Terminale S

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Raisonnement par récurrence Suite monotone, majorée, minorée, bornée.	On choisira des exemples permettant d'introduire le vocabulaire usuel des suites et nécessitant l'utilisation de raisonnements par récurrence. On s'appuiera sur un traitement tant numérique (avec outils de calcul : calculatrice ou ordinateur) que graphique ou algébrique.	On présentera le principe de récurrence comme un axiome.
Suites Modes de générations d'une suite numérique. Suite croissante, suite décroissante.	On étudiera numériquement sur un ou deux exemples, la rapidité de convergence d'une suite (u_n) vers sa limite L, en complétant l'étude sur tableur par des encadrements de $(u_n - L)$. On traitera quelques problèmes menant à l'étude de suites définies par $u_{n+1} = au_n + b$.	Aucune notion théorique de rapidité de convergence n'est au programme.

Thème : Nombres complexes

1. L'exercice proposé au candidat

On considère l'application f qui à tout nombre complexe z associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = \mathrm{e}^y\big(\cos(\pi x) + i\sin(\pi x)\big).$$

où x et y désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de z.

1) Placer dans le plan muni d'un repère orthonormal les points d'affixes $f(i), f(1+i)$ et $f(1-i)$.
2) Démontrer que pour tout couple $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$f(z+z') = f(z)f(z') \quad \text{et} \quad f(nz) = \big(f(z)\big)^n.$$

3) Démontrer que, pour tout nombre complexe z, le nombre complexe $f(z)$ est non nul puis déterminer le module et un argument de $f(z)$.
4) Construire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan dont l'affixe $z = x+iy$ vérifie les conditions $|x| \leq 1$ et $|y| = 1$. Déterminer et construire l'ensemble des points d'affixe $f(z)$ quand le point M d'affixe z parcourt l'ensemble $\mathcal{E}$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse à la question 4) ;

◇ un ou plusieurs exercices sur le thème « **Nombres complexes** ».

Le candidat présentera au jury :

- le contenu de ses fiches ;
- les méthodes et les savoirs mis en jeu ainsi que les objectifs d'apprentissage visés dans cet exercice.

3. Quelques références aux programmes

Programme de Terminale scientifique

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Géométrie plane : nombres complexes		
Le plan complexe : affixe d'un point ; parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe. Conjugué d'un nombre complexe. Somme, produit, quotient de nombres complexes. Module et argument d'un nombre complexe ; module et argument d'un produit, d'un quotient. Écriture $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels.	Le vocabulaire sera introduit à partir de considérations géométriques. On retrouvera à cette occasion la notion de coordonnées polaires et celle, sous-jacente, d'équation paramétrique d'un cercle sous la forme $z = z_\omega + r\mathrm{e}^{i\theta}$ ou $x = x_\omega + r\cos(\theta)$, $y = y_\omega + r\sin(\theta)$. La notation exponentielle sera introduite après avoir montré que la fonction $\theta \mapsto \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ vérifie l'équation fonctionnelle caractéristique des fonctions exponentielles.	La vision des nombres complexes est d'abord géométrique : calculs sur des points du plan. Les repérages cartésien et polaire introduits en Première conduisent naturellement à deux écritures d'un nombre complexe. L'objectif est ensuite de montrer la puissance de ce calcul dans les problèmes de géométrie. On introduira dans ce chapitre quelques éléments lui donnant une dimension historique. Les nombres complexes permettent de retrouver et de mémoriser les formules trigonométriques d'addition et de duplication vues en Première.
Interprétation géométrique de $z \mapsto z'$ avec $z' = z + b$ ou $z' - w = k(z - w)$ avec k réel non nul, ou $z' - w = \mathrm{e}^{i\theta}(z - w)$.	On utilisera les nombres complexes pour traiter des exemples simples de configurations et résoudre des problèmes faisant intervenir des translations, des rotations, des homothéties.	On exploitera à la fois les possibilités offertes par les nombres complexes et les raisonnements géométriques directs qui réactivent les connaissances antérieures, notamment sur les transformations du plan.

Thème : Intégration

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{1-x}.$$

1) Donner le tableau de variation de f et tracer l'allure de sa représentation graphique dans un repère orthonormal.
2) On considère la fonction F définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   a) Démontrer que pour tout réel t positif, on a : $2\sqrt{2}\sqrt{t} \leqslant t + 2$.
   b) En déduire que pour tout réel x appartenant à $[1, +\infty[$ on a :

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(4 - (x+3)\,\mathrm{e}^{1-x}\Big).$$

   c) En déduire que pour tout réel x appartenant à $[1, +\infty[$ on a : $0 \leqslant F(x) \leqslant \sqrt{2}$.
3) La fonction F admet-elle une limite en $+\infty$?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse à la question 2)b) ;

◇ un ou plusieurs exercices sur le thème « **Intégration** ».

Le candidat présentera au jury :

– le contenu de ses fiches ;

– les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

3. Quelques références aux programmes

Programme de Terminale S

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Intégration		
Pour une fonction f continue positive sur $[a, b]$, introduction de la notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ comme aire sous la courbe. Valeur moyenne d'une telle fonction.	On indiquera que l'aire sous la courbe peut être approchée en l'encadrant par deux suites adjacentes construites en quadrillant le plan de plus en plus finement. Exemple où la fonction intégrée est en escalier. Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable.	Les élèves ont une notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul de l'aire de domaines plans liés aux fonctions ; tout développement théorique est exclu.
Extension à l'intégrale et à la valeur moyenne d'une fonction de signe quelconque.	On indiquera la convention de signe sur un intervalle où f est négative et on en déduira le cas général ; on pourra aussi ajouter une constante à f pour la rendre positive.	Cette extension doit être faite brièvement. Cette convention de signe prendra tout son sens lors de l'étude de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Intégration et dérivation		
Notion de primitive. Théorème : « si f est continue sur un intervalle I, et si a est un point de I, la fonction F telle que $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a ».	On démontrera que F est une primitive de f dans le cas où f est continue et croissante, et on admettra le cas général.	L'intégration permet d'établir l'existence de primitives des fonctions continues et d'en donner des méthodes numériques de calcul ; inversement, la connaissance d'une primitive d'une fonction continue donne une formule explicite pour le calcul des intégrales : les élèves devront percevoir l'intérêt de cette double démarche.
Calcul de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une primitive de f.	Tableau primitives-dérivées des fonctions usuelles (fonctions $x \mapsto x^n$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$, sinus, cosinus). Application de la dérivation des fonctions composées à la primitivation de u'/u, $u'\mathrm{e}^u$, $u'u^n$.	L'existence d'une solution de $y' = f(t)$, admise en 1re est ainsi justifiée ; de même, est justifiée l'existence du logarithme : celle de sa fonction réciproque en découle alors. La volonté d'introduire rapidement la fonction exponentielle pour la physique aura conduit à admettre un théorème d'existence en début d'année, qui se trouve ici justifié.
Intégration par parties.		On se limitera à des cas simples où l'élève aura à trouver lui-même le recours à la technique d'intégration par parties.

Thème : Différents types de raisonnement

1. L'exercice proposé au candidat

Les propositions suivantes sont indépendantes. Pour chacune d'elles, préciser si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1) Pour tout entier naturel n, l'entier $n^2 + n + 41$ est un nombre premier.
2) Pour tout entier n, le nombre $n(n + 1)(2n + 1)$ est divisible par 3.
3) Toute suite strictement croissante tend vers $+\infty$.
4) Le nombre $\sqrt{2}$ est rationnel.
5) Les deux bouts d'une corde non élastique de 101 mètres sont fixés au sol au moyen de deux piquets distants de 100 mètres. On tend la corde en la tirant verticalement par son milieu aussi haut que possible. Une personne mesurant 1,68 m peut alors passer sous la corde sans se baisser.

.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse à la question concernant les propositions 2) et 4) ;

◇ plusieurs exercices mettant en jeu différents types de raisonnement dont un au moins ne fait pas appel à la géométrie.

Le candidat présentera au jury :

– le contenu de ses fiches ;

– l'énoncé détaillé d'un exercice permettant de traiter le cas de la proposition 4) ;

– les différents types de raisonnement mis en œuvre dans l'exercice.

3. Quelques références aux programmes

Préambule du programme de Collège

Une initiation très progressive à la démonstration

La question de la preuve occupe une place centrale en mathématiques. La pratique de l'argumentation pour convaincre autrui de la validité d'une réponse, d'une solution ou d'une proposition ou pour comprendre un « phénomène » mathématique a commencé dès l'école primaire et se poursuit au collège pour faire accéder l'élève à cette forme particulière de preuve qu'est la démonstration. Si, pour cet objectif, le domaine géométrique occupe une place particulière, la préoccupation de prouver et de démontrer ne doit pas s'y cantonner. Le travail sur les nombres, sur le calcul numérique, puis sur le calcul littéral offre également des occasions de démontrer.

À cet égard, deux étapes doivent être clairement distinguées : la première, et la plus importante, est la recherche et la production d'une preuve ; la seconde, consistant à mettre en forme la preuve, ne doit pas donner lieu à un formalisme prématuré. En effet, des préoccupations et des exigences trop importantes de rédaction risquent d'occulter le rôle essentiel du raisonnement dans la recherche et la production d'une preuve. C'est pourquoi il est important de ménager une grande progressivité dans l'apprentissage de la démonstration et de faire une large part au raisonnement, enjeu principal de la formation mathématique au collège. La rédaction et la mise en forme d'une preuve gagnent à être travaillées collectivement, avec l'aide du professeur, et à être présentées comme une façon convaincante de communiquer un raisonnement aussi bien à l'oral qu'à l'écrit.

[...] Cette initiation à la démonstration doit en particulier permettre aux élèves de distinguer une propriété conjecturée et vérifiée sur des exemples d'une propriété démontrée. En particulier, l'enseignant doit préciser explicitement qu'un résultat mathématique qui n'est pas démontré est admis.

Classe de Première et de Terminale S

Généralités à propos d'une formation scientifique en Première et en Terminale S

[...] La démonstration est constitutive de l'activité mathématique et les élèves doivent en prendre conscience. Faire en sorte que les élèves puissent concevoir des démonstrations dans leur globalité, puis en détailler les différentes étapes, a toujours été et reste un objectif essentiel de tout enseignement des mathématiques en France. Le monde mathématique de chaque élève s'élabore en grande partie à travers une pratique permanente de calculs, d'argumentations, de petits raisonnements et de démonstrations.

Le niveau de rigueur exigible pour une démonstration dépend de l'expérience de l'élève dans le domaine où cette démonstration se situe : ainsi, pour la géométrie, pratiquée depuis l'école primaire, on peut prétendre exiger dès la classe de Seconde un niveau de démonstration académique ; en analyse, par contre, la plupart des objets manipulés ne sont pas définis formellement à ce niveau d'études, et les élèves ne peuvent pas aboutir à des démonstrations parfaitement achevées : la nature et le niveau des rédactions exigibles ne peuvent pas être les mêmes. Il conviendra donc, à ce niveau d'étude, en particulier en analyse, d'accepter des argumentations conçues et exposées à l'aide de schémas (même si les élèves ne peuvent pas à ce stade les traduire en un texte linéaire). On gardera néanmoins l'état d'esprit déjà évoqué dans les programmes de collège et de Seconde : repérer clairement le statut des divers énoncés en jeu (définition, axiome, théorème démontré, théorème admis...).

La déduction usuelle (par implication ou équivalence) et la manipulation du contre-exemple ont été travaillées en Seconde ; des problèmes bien choisis permettront d'aborder en Première le raisonnement par contraposition, par l'absurde ou par disjonction des cas ; le raisonnement par récurrence relève de la classe de Terminale.

La démonstration doit garder un caractère vivant et personnel et il convient d'éviter qu'elle n'apparaisse comme une activité relevant d'un protocole trop rigide. Chaque année, les assertions qui doivent être justifiées dans le cadre d'une pratique de la démonstration changent : il est difficile pour les élèves de cerner, parmi les éléments qui devaient être justifiés les années précédentes, ceux qui deviennent des évidences, pour lesquelles une justification ne ferait qu'alourdir la démonstration (ainsi, en Première, on peut mettre dans le bagage des évidences que la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est à valeurs positives).

[...]

Thème : Géométrie dans l'espace

1. L'exercice proposé au candidat

L'espace est rapporté à une repère orthonormal d'origine O.
On considère les points A, B, C et S de coordonnées respectives :

$$A(-1,0,1) \qquad B(1,4,-1) \qquad C(3,-4,-3) \qquad S(4,0,4).$$

1) Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle en A.
2) a) Démontrer que O est le barycentre des points A, B et C affectés de coefficients que l'on déterminera.
   b) En déduire que O est situé à l'intérieur du triangle ABC.
3) a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{SO}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
4) Calculer le volume du tétraèdre $SABC$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa solution de la question 2) ;
- ◇ deux exercices se rapportant au thème « **Géométrie dans l'espace** » dont un au moins fait appel à la notion de barycentre.

Le candidat présentera au jury :

- le contenu de ses fiches ;
- les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

3. Quelques références aux programmes

Programme de Terminale S

II.2 GÉOMÉTRIE

L'objectif de ce paragraphe est d'entretenir la pratique des objets usuels du plan et de l'espace et de fournir quelques notions nouvelles permettant de parfaire l'approche entreprise dans les classes antérieures sur la géométrie vectorielle ou repérée. [...] L'extension à l'espace du produit scalaire permet de résoudre de nouveaux problèmes et, de ce fait, d'approfondir la vision de l'espace.

Bien que, comme dans les programmes antérieurs, le libellé de cette partie soit relativement concis, on prendra le temps de mettre en œuvre toutes les connaissances de géométrie de l'ensemble du cursus scolaire pour l'étude de configurations du plan ou de l'espace, le calcul de distances, d'angles, d'aires et de volumes, etc..

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Produit scalaire dans l'espace		
Rappels sur le produit scalaire dans le plan. Définition du produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace. Propriétés, expression en repère orthonormal.	Expression en repère orthonormal de la distance d'un point à une droite dans le plan. Plan orthogonal à un vecteur passant par un point. Équation cartésienne en repère orthonormal. Expression de la distance à un plan. Inéquation définissant un demi-espace.	On généralisera aux vecteurs de l'espace la définition du produit scalaire donnée dans le plan ; à cette occasion on présentera la projection orthogonale sur une droite ou sur un plan.
Droites et plans dans l'espace		
Caractérisation barycentrique d'une droite, d'un plan, d'un segment, d'un triangle. Représentation paramétrique d'une droite de l'espace Intersection de deux plans, d'une droite et d'un plan, de trois plans ; discussion algébrique.	On reprendra les problèmes d'alignement et de concours déjà abordés en classe de Première. On fera clairement apparaître que les problèmes géométriques considérés ici sont l'étude des systèmes d'équations linéaires, que l'on résoudra algébriquement. On traitera aussi quelques situations numériques (issues de l'analyse, de situations économiques ou d'autres) s'y ramenant.	Les élèves doivent aussi savoir qu'une droite de l'espace peut être représentées par un système de deux équations linéaires.